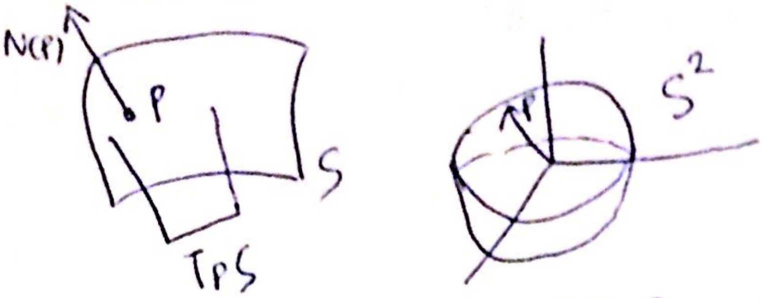
Διαφορική Γεωμετρία

28/11/16

## Απεικόνιση Gauss:




$P \to \bar{P}$

$\overline{OP} = N(P)$

## Απεικόνιση Weingarten:

$P \in S$, $L_P = -dN_P$, $L_P : T_PS \to T_PS$. Μας δείχνει πως μεταβάλλεται το εφαπτόμενο επίπεδο

**Πρόταση:** Η απεικόνιση Weingarten είναι αυτοπροσαρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός • $\langle\, , \rangle_p$, δηλαδή:

$$\langle L_p w_1, w_2 \rangle_p = \langle w_1, L_p w_2 \rangle \quad \forall\, w_1, w_2 \in T_pS$$

**Απόδειξη:**

Έστω $X : U \to S$ σύστημα συντεταγμένων με $P \in X(U)$

Αρκεί νδο $\langle LX_u, X_v \rangle = \langle X_u, LX_v \rangle$

$LX_u = -dN(X_u) = -(N \circ X)_u$

$N(X(u, v=v_0)) = N \circ X(u, v=v_0)$.

$$\begin{cases} LX_u = -(N\circ X)_u \\ LX_v = -(N\circ X)_v \end{cases}$$

$$\begin{cases} LX_u = -(N\circ X)_u = -N_u \\ LX_v = -(N\circ X)_v = -N_v \end{cases}$$

$\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle$

$\langle N_u, X_v \rangle = (\langle N, X_v \rangle)_u - \langle N, (X_v)_u \rangle$

$$\boxed{\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N, X_{vu} \rangle}$$

$\langle X_u, N_v \rangle = (\langle X_u, N \rangle)_v - \langle (X_u)_v, N \rangle$

$$\boxed{\langle X_u, N_v \rangle = -\langle X_{uv}, N \rangle}$$

[Έστω $(V, \langle , \rangle)$ δ.χ με εσωτερικό γινόμενο και
$A: V \to V$ αυτοπροσαρτημένος γραμμ. μετασχηματισμός
$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \; \forall x, y \in V$
Ορίζω τη διγραμμική μορφή
$b_A : V \times V \to \mathbb{R}$, $b_A(x, y) = \langle Ax, y\rangle$
Επειδή $A$ αυτοπροσαρτημένος $\Rightarrow$ $b_A$ είναι συμμετρική διγραμμική μορφή δηλ. $b_A(x,y) = b_A(y,x)$
Η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή $Q_A : V \to \mathbb{R}$ είναι:
$Q_A(x) = b_A(x, x) = \langle Ax, x\rangle$
$b_A(x,y) = \frac{1}{2}\{Q_A(x+y) - Q_A(x) - Q_A(y)\}$]

<u>Δεύτερη θεμελιώδης μορφή</u>:

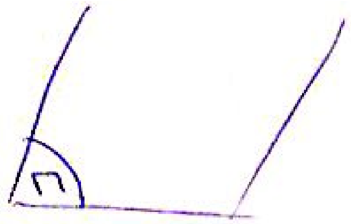
<u>Ορισμός</u>: Έστω $S$ προσανατ. επιφάνεια. Καλούμε 2η θεμελιώδης μορφή της $S$ στο σημείο $P$ την τετραγωνική μορφή:
$\mathrm{II}_p : T_pS \to \mathbb{R}$, $\mathrm{II}_p(w) = \langle L_p w, w\rangle$
$w \in T_pS$

<u>Ερώτημα</u>: Από τι καθορίζεται μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ (ως προς γεωμ. ισοτιμία);

Παράδειγμα:

(1) $\Pi: Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$, $(A,B,\Gamma)\neq(0,0,0)$, $\Pi=f^{-1}(c)$

$f(x,y,z)=Ax+By+\Gamma z+\Delta$

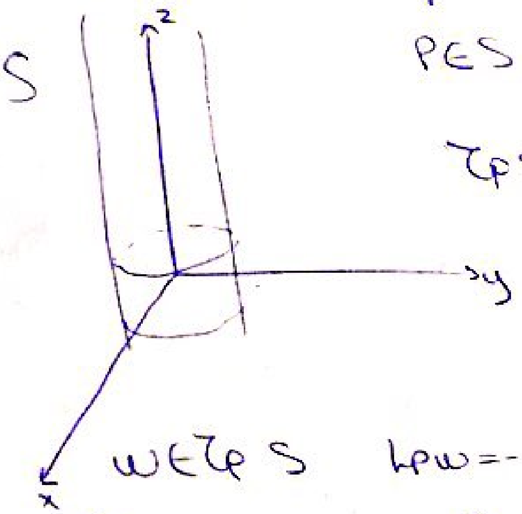



$$N=\frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}=\frac{(A,B,\Gamma)}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$

$$L_p=-dN_p \Rightarrow \boxed{L_p=0} \Rightarrow \boxed{II_p(w)=0} \quad \forall\, w\in T_p\Pi$$

(2) $S$ $x^2+y^2=r^2$ Η απεικόνιση Gauss $N: S\to S^2$

$N(x,y,z)=-\frac{1}{r}(x,y,0)$




$p\in S$ $p=(x_0,y_0,z_0)$ $L_p: T_pS\to T_pS$

$T_pS=\{w\in\mathbb{R}^3 / \langle w,N(p)\rangle=0\}=\{w=(w_1,w_2,w_3)/x_0w_1+y_0w_2=0\}$

$w\in T_pS$ $L_pw=-dN_p(w)$

Θεωρώ $c:(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$, $c(t)=(x(t),y(t),z(t))$ $\Big|$ $N\circ c(t)=N(c(t))$ $=N(x(t),y(t),z(t))$ $=-\frac{1}{r}(x(t),y(t),0)$

με $c(0)=p$ $c'(0)=w=(w_1,w_2,w_3)$

$L_pw=-(N\circ c)'(0)=\frac{1}{r}(x'(0),y'(0),0)$

$L_pw=L_p(w_1,w_2,w_3)=\frac{1}{r}(w_1,w_2,0)$ $\quad w\in T_pS \Leftrightarrow x_0w_1+y_0w_2=0$

$II_p(w)=\langle L_pw,w\rangle=\langle\frac{1}{r}(w_1,w_2,0),(w_1,w_2,w_3)\rangle \Rightarrow$

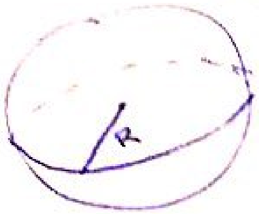
$\Rightarrow II_p(w)=\frac{1}{r}(w_1^2+w_2^2)=\frac{1}{r}(\|w\|^2-w_3^2)$

$II_p(w_1,w_2,0)=\frac{1}{r}(w_1,w_2,0)$ εφάπτονται στους κύκλους

$II_p(0,0,w_3)=0$ εφάπτονται στις γενέτειρες

③ Τυχαία σφαίρα ακτίνας $R$

$$S^2_R = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 \in \mathbb{R}^2\}$$




$$N: S^2_R \to S^2$$

$$N(x,y,z) = \frac{1}{R}(x,y,z)$$

$$L_p: T_pS^2 \to T_pS^2_R$$

$$T_pS^2_R = \{w = (w_1,w_2,w_3)\in\mathbb{R}^2 / \langle w, N(p)\rangle = 0\}$$

$$= \{w=(w_1,w_2,w_3) / w_1x_0 + w_2y_0 + w_3z_0 = 0\}$$

Θεωρώ $w \in T_pS^2_R$ $\quad w = (w_1,w_2,w_3)$

και $c(-\varepsilon,\varepsilon) \to S^2_R$ με $c(0) = p = (x_0,y_0,z_0)$

και $c'(0) = w = (w_1,w_2,w_3)$

$$L_pw = -dN_p(w) = -(N\circ c)'(0)$$

$$c(t) = (x(t),y(t),z(t)) \qquad N\circ c(t) = N(c(t)) = \frac{-1}{R}(x(t),y(t),z(t))$$

$$(N\circ c)'(0) = -\frac{1}{R}(x'(0),y'(0),z'(0))$$

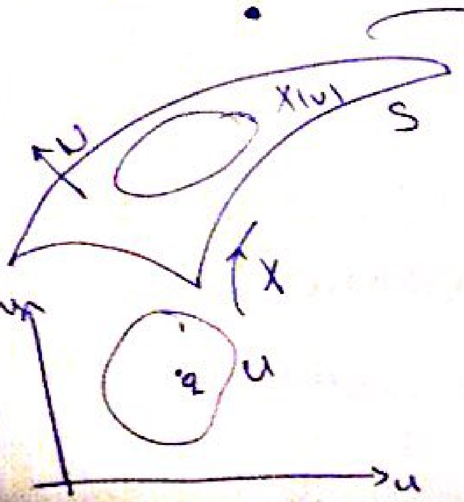
$$= -\frac{1}{R}(w_1,w_2,w_3)$$

Συμπέρασμα: $L_pw = \frac{1}{R}w$ $\quad II_p: T_pS \to \mathbb{R}$, $II_p(w) = \langle L_pw, w\rangle$

$$= \langle \frac{1}{R}w, w\rangle = \frac{1}{R}\|w\|^2$$

$II_p(w) = \frac{1}{R}\|w\|^2 \qquad I_p(w) = \|w\|^2$

$$II_p = \frac{1}{R} I_p$$




Έστω $X: U \to S$ σύστημα συντεταγμένων του $S$

$N\circ X = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u\times X_v\|}$ $\quad p \in X(U)$, $II_p: T_pS \to \mathbb{R}$

$v = X^{-1}(p)$ $\quad T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$

$(w_1,w_2) \mapsto \langle L_pw_1, w_2\rangle_p$

$\{X_u(q), X_v(q)\}$ βάση του $T_pS$

Ο πίνακας της $II_p$ ως προς τη βάση $\{X_u(q), X_v(q)\}$

είναι $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$, όπου $\begin{cases} e = \langle L_p X_u, X_u \rangle \\ f = \langle L_p X_u, X_v \rangle = \langle L_p X_v, X_u \rangle \\ g = \langle L_p X_u, X_u \rangle \end{cases}$

$L X_u = -(N \circ X)_u = -N_u$

$L X_v = -(N \circ X)_v = -N_v$

$: e = \langle L X_u, X_u \rangle = -\langle N_u, X_u \rangle$

$= -(\cancel{\langle N, X_u \rangle})_u + \langle N, X_{uu} \rangle$

$e = \langle N, X_{uu} \rangle$

$f = \langle N, X_{uv} \rangle$

$g = \langle N, X_{uv} \rangle$

$\omega \in T_pS$, $\omega = a X_u + b X_v$

$II_p(\omega) = \langle L_p \omega, \omega \rangle_p$

$= \langle L(a X_u + b X_v), a X_u + b X_v \rangle$

$= \langle a L X_u + b X_v, a X_u + b X_v \rangle$

$= a^2 \langle L X_u, X_u \rangle + ab \langle L X_u, X_v \rangle + ab \langle L X_v, X_u \rangle + b^2 \langle L X_v, X_v \rangle$

$\omega = a X_u + b X_v$ $\quad I_p(\omega) = E a^2 + 2 F ab + G b^2$

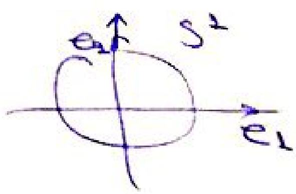
$\omega \in T_pS$

$II_p(\omega) = e a^2 + 2 f ab + g b^2$

$V$ διαν. χώρος με $\dim V = 2$ εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \ldots, \ldots \rangle$ και $A: V \to V$ αυτοπροσαρτημένος γραμμικός μετασχηματ.

$B_A: V \times V \to \mathbb{R}$ $\quad B_A(x,y) = \langle Ax, y \rangle$

$q_A: V \to \mathbb{R}$ $\quad S = \{v \in V \,/\, \|v\| = 1\}$



$q_A/S$ $\quad S^1 \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει μέγιστο.

δηλαδή υπάρχει $e \in S^1$

$Q_A(e) = \max Q_A(v)$ $\quad \|v\| = 1$

Θεωρώ βάση ορθοκανονική $\{e_1 = e_1, \ldots e_n\}$

$u \in S^1$ $\qquad u = \cos t\, e_1 + \sin t\, e_2$

$Q_A(u) = Q_A(\cos t\, e_1 + \sin t\, e_2) = \langle A(\cos t\, e_1 + \sin t\, e_2), u\rangle =$

$= \langle Ae_1, e_1\rangle \cos^2 t + 2\langle Ae_1, e_2\rangle \sin t \cos t + \langle Ae_2, e_2\rangle \sin^2 t$

$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (Q_A(v)) = 0 \Rightarrow \langle Ae_1, e_2\rangle = 0$ $\quad\Big|\quad Ae_1 = \langle Ae_1, e_1\rangle e_1 + \langle Ae_1, e_2\rangle e_2$

$\qquad Ae_1 = Q_A(e)e_1$